

С.В. ГРИНЧЕНКО, н.с., Институт ионосферы, Харьков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИОННОЙ ЧАСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НЕКОГЕРЕНТНО РАССЕЯННОГО СИГНАЛА

Получены расчётная формула спектральной функции ионной составляющей спектра некогерентного рассеяния и её упрощённый вид при использовании асимптотических приближений. Проведена оценка погрешности асимптотических вычислений.

Отримані розрахункова формула спектральної функції іонної складової спектру некогерентного розсіяння і її спрощений вигляд при використанні асимптотичних наближень. Проведена оцінка похибки асимптотичних обчислень.

The spectral function formula of ionic component of the incoherent scattering spectrum and its simplified asymptotic expression are presented. The asymptotic error is estimated.

Введение. Основополагающие статьи, посвященные теоретическим основам метода некогерентного рассеяния (НР), появились в печати в течение 60-х и 70-х годов [1–9]. Однако ни в этих работах, ни в последующих трудах [10–13] не приведены расчётные формулы для вычисления спектральной функции и автокорреляционной функции (АКФ) некогерентно рассеянного сигнала, экспериментальные значения которых измеряют на радарх НР. В статьях и монографиях [14–19] приведены расчётные формулы, позволяющие интерпретировать экспериментально полученные значения АКФ с целью вычисления ионосферных параметров. Однако в этих работах не приводится вывод теоретических выражений расчётных формул.

Цель работы – вывести упомянутые расчётные формулы, применяемые на радаре Института ионосферы; сравнить спектральные функции ионной части спектра некогерентно рассеянного сигнала в её общем виде и при использовании асимптотических разложений некоторых членов, входящих в аналитическое выражение спектральной функции.

Определение спектральной функции некогерентно рассеянного сигнала. При распространении в квазиоднородной плазме плоской монохроматической волны $\vec{E}(\vec{R}, t) \sim \vec{E}_0 \exp(i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \vec{R}))$ вследствие тепловых флуктуаций плотности электронов (концентрация электронов n_e испытывает отклонения δn_e от равновесного состояния n_{e0} : $n_e = n_{e0} + \delta n_e$) наблюдается появление волн с измененными частотами и направлениями рассеяния. Интенсивность некогерентного рассеяния элементом объема dV в элемент телесного угла $d\Omega$ в интервале частот $d\omega$ определяется формулой [6]:

$$d\bar{I} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \overline{(E_0^\perp)^2} \left\langle (\delta n_e)^2 \right\rangle_{\Delta\vec{k}, \Delta\omega} \left| \begin{array}{l} d\omega d\Omega dV, \\ \Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0 \\ \Delta\omega = \omega - \omega_0 \end{array} \right.$$

где ω_0 – частота падающей волны; ω – частота рассеянной волны; \vec{k}_0 – волновой вектор падающей волны; \vec{k} – волновой вектор рассеянной волны; $\varepsilon(\omega)$ – диэлектрическая проницаемость плазмы; \vec{E}_0^\perp – составляющая вектора \vec{E}_0 , перпендикулярная вектору \vec{k} ; $\left\langle (\delta n_e)^2 \right\rangle_{\vec{k}, \omega}$ – спектральное распределение пространственно-временной автокорреляционной функции флуктуаций n_e .

При обратном рассеянии для волны круговой поляризации $\overline{(E_0^\perp)^2} = E_0^2$.

Если $\Delta\omega \ll \omega_0$, то $\varepsilon(\omega) \cong \varepsilon(\omega_0)$. Тогда

$$d\bar{I} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2 \left\langle (\delta n_e)^2 \right\rangle_{\Delta\vec{k}, \Delta\omega} \left| \begin{array}{l} d\omega d\Omega dV. \\ |\Delta\vec{k}| = \frac{4\pi}{\lambda_0} \\ \Delta\omega = \omega - \omega_0 \end{array} \right.$$

Величина

$$\frac{d\bar{I}}{d\omega d\Omega dV} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2 \left\langle (\delta n_e)^2 \right\rangle_{\Delta\vec{k}, \Delta\omega} \left| \begin{array}{l} |\Delta\vec{k}| = \frac{4\pi}{\lambda_0} \\ \Delta\omega = \omega - \omega_0 \end{array} \right. =$$

$$= S(\omega) = S(\omega_0 + \Delta\omega) = S^*(\Delta\omega)$$

является спектральной функцией сигнала НР [6].

Спектральное распределение пространственно-временной АКФ флуктуаций плотности электронов в равновесной электронно-ионной плазме без учета столкновений определяется выражением [6]:

$$\left\langle (\delta n_e)^2 \right\rangle_{\vec{k}, \omega} = (2\pi)^4 \frac{8\pi n_{e0} \lambda_D^2 k^2}{\omega |\varepsilon_{\parallel}|^2} \left[|1 + 4\pi\chi_{\parallel}|^2 \operatorname{Im} \chi_{e\parallel} + \frac{1}{i} |4\pi\chi_{e\parallel}|^2 \operatorname{Im} \chi_{i\parallel} \right],$$

где $\varepsilon_{\parallel}(\omega, \vec{k})$ – продольная составляющая диэлектрической проницаемости плазмы; $\chi_{e\parallel}(\omega, \vec{k})$ – электронная составляющая для продольной

электрической восприимчивости; $\chi_{\text{III}}(\omega, \vec{k})$ – ионная составляющая для продольной электрической восприимчивости; $t = T_e/T_i$ – отношение температур электронов и ионов; λ_D – радиус Дебая.

Для плазмы, состоящей из электронов и ионов разных сортов,

$$\varepsilon_{\text{II}}(\omega, \vec{k}) = 1 + \frac{1}{\lambda_D^2 k^2} \left[1 - \varphi(z) + t \left(1 - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \varphi(\mu_{\alpha} z) \right) + i\sqrt{\pi} z \left(e^{-z^2} + t \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} e^{-\mu_{\alpha}^2 z^2} \right) \right];$$

$$\chi_{e\text{II}}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{4\pi\lambda_D^2 k^2} \left[1 - \varphi(z) + i\sqrt{\pi} z e^{-z^2} \right];$$

$$\chi_{\text{III}}(\omega, \vec{k}) = \frac{t}{4\pi\lambda_D^2 k^2} \left[1 - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \varphi(\mu_{\alpha} z) + i\sqrt{\pi} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} z e^{-\mu_{\alpha}^2 z^2} \right],$$

где γ_{α} – относительное содержание ионов сорта α ; $\mu_{\alpha} = \sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_e}} t$; $m_{i\alpha}$ – масса

ионов сорта α ; $z = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_e}{2kT_e}}$ – электронно-нормированная частота;

$$\varphi(z) = 2ze^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx.$$

Применение асимптотических приближений при вычислении спектральной функции. Для ионов O^+ атомного кислорода, доминирующих

в области F2, величина $\sqrt{\frac{m_e}{m_{\text{O}^+}}} \approx 0.0059$. Для ионов гелия He^+ и водорода H^+ ,

содержащихся во внешней ионосфере, величины $\sqrt{\frac{m_e}{m_{\text{He}^+}}} \approx 0.0117$,

$\sqrt{\frac{m_e}{m_{\text{H}^+}}} \approx 0.0234$. Используя асимптотическое приближение функции

$\varphi(z) \cong 2z^2$ ($z \ll 1$), можно показать, что в области частот z , меньших или порядка $\frac{1}{\mu_{\alpha}}$ ($\mu_{\alpha} \gg 1$), спектральное распределение пространственно-

временной АКФ флуктуаций плотности электронов при $\lambda_D^2 k^2 \ll 1$, $t^2 \ll \mu_{\alpha}$ имеет вид:

$$\langle (\delta n_e)^2 \rangle_{\vec{k}, \omega} \approx (2\pi)^4 \frac{2\sqrt{\pi} n_{e0} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} e^{-\mu_{\alpha}^2 z^2}}{\left[1 + t \left(1 - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \varphi(\mu_{\alpha} z) \right) \right]^2 + \pi t^2 \left(\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} z e^{-\mu_{\alpha}^2 z^2} \right)^2},$$

где $\beta_{\alpha} = \frac{1}{k} \left(\frac{m_{i\alpha}}{2\kappa T_i} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Для плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, ионная часть спектрального распределения пространственно-временной АКФ флуктуаций плотности электронов при асимптотических приближениях равна

$$\langle (\delta n_e)^2 \rangle_{\vec{k}, \omega} \approx (2\pi)^4 \frac{2\sqrt{\pi} n_0 \beta e^{-\mu^2 z^2}}{\left[1 + t(1 - \varphi(\mu z)) \right]^2 + \pi t^2 \mu^2 z^2 e^{-2\mu^2 z^2}}.$$

Спектральная функция

$$\begin{aligned} S^*(\Delta\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2 \langle (\delta n_e)^2 \rangle \Bigg|_{\substack{|\Delta\vec{k}| = \frac{4\pi}{\lambda_0} \\ \Delta\omega = \omega - \omega_0}} \approx \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2 \cdot (2\pi)^4 \frac{2\sqrt{\pi} n_0 \beta e^{-\mu^2 z^2}}{\left[1 + t(1 - \varphi(\mu z)) \right]^2 + \pi t^2 \mu^2 z^2 e^{-2\mu^2 z^2}} = \\ &= \frac{c n_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \frac{\beta e^{-\mu^2 z^2}}{\left[1 + t(1 - \varphi(\mu z)) \right]^2 + \pi t^2 \mu^2 z^2 e^{-2\mu^2 z^2}} = S_0^*(\Delta\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная функция при асимптотических приближениях равна

$$S_0^*(\Delta\omega) = \frac{c n_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \cdot \frac{\beta e^{-\mu^2 z^2}}{\left[1 + t(1 - \varphi(\mu z)) \right]^2 + \pi t^2 \mu^2 z^2 e^{-2\mu^2 z^2}},$$

где $\beta = \frac{1}{\Delta k} \left(\frac{m_i}{2\kappa T_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi} \left(\frac{m_i}{2\kappa T_i} \right)^{\frac{1}{2}}$; $z = \beta_e \Delta\omega = \frac{\beta}{\mu} \Delta\omega$, $\mu = \left(\frac{m_i}{m_e} t \right)^{\frac{1}{2}}$.

Нормированная спектральная функция $s_0^*(\Delta\omega) = \frac{S_0^*(\Delta\omega)}{R_0^*(0)}$, где

$R_0^*(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0^*(\Delta\omega) \cos(\Delta\omega \cdot \tau) d(\Delta\omega)$ – АКФ перенесённого на нулевую частоту

НР сигнала.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } R_0^*(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_0^*(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cn_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \frac{\beta e^{-\mu^2 z^2}}{[1+t(1-\varphi(\mu z))]^2 + \pi t^2 \mu^2 z^2 e^{-2\mu^2 z^2}} d(\Delta\omega) = \\ &= \frac{cn_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\theta^2}}{[1+t(1-\varphi(\theta))]^2 + \pi t^2 \theta^2 e^{-2\theta^2}} d\theta, \end{aligned}$$

где $\theta = \mu z$.

$$\begin{aligned} \text{Так как } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\theta^2}}{[1+t(1-\varphi(\theta))]^2 + \pi t^2 \theta^2 e^{-2\theta^2}} d\theta &= \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\theta^2}}{[1+t(1-\varphi(\theta))]^2 + \pi t^2 \theta^2 e^{-2\theta^2}} d\theta \cong 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+t)} = \frac{\sqrt{\pi}}{1+t}, \end{aligned}$$

$$\text{то } R_0^*(0) \cong \frac{cn_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{1+t}.$$

Нормированная спектральная функция

$$\begin{aligned} s_0^*(\Delta\omega) &= \frac{S_0^*(\Delta\omega)}{R_0^*(0)} = \frac{\beta e^{-\mu^2 z^2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{1+t}} = \\ &= \frac{1+t}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta e^{-\theta^2}}{[1+t(1-\varphi(\theta))]^2 + \pi t^2 \theta^2 e^{-2\theta^2}} = s_0^*(\theta). \end{aligned}$$

При вычислении значений функции $s_0^*(\Delta\omega)$ воспользуемся выражением

$$\mu = \left(\frac{m_i}{m_e} t \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m_i(a.e.m.) \cdot 1.660539 \cdot 10^{-24}}{9.10938 \cdot 10^{-28}} t \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m_i(a.e.m.) \cdot 1.660539}{9.10938} t \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 100.$$

Если $m_i = 16$ а.е.м., $t = 1.5$, то $\mu \approx 209.2$; при $m_i = 4$ а.е.м., $t = 1.5$ величина $\mu \approx 104.6$; при $m_i = 1$ а.е.м., $t = 1.5$ получаем $\mu \approx 52.3$.

$$\begin{aligned} \text{Величина } \beta &= \frac{\lambda_0}{4\pi} \left(\frac{m_i}{2\kappa T_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_0(\mathcal{M}) \cdot 10^2}{4\pi} \left(\frac{m_i(\text{а.е.м.}) \cdot 1.660539 \cdot 10^{-24}}{2 \cdot 1.3806488 \cdot 10^{-16} \cdot T_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\lambda_0(\mathcal{M}) \cdot 0.01}{4\pi} \left(\frac{m_i(\text{а.е.м.}) \cdot 1.660539}{2 \cdot 1.3806488 \cdot T_i} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Сдвиг частоты } \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\mu z}{2\pi\beta}.$$

Функция $\varphi(\mu z) = 2\mu z e^{-\mu^2 z^2} \int_0^{\mu z} e^{x^2} dx$. Так как вычисление спектральной функции мы будем производить, изменяя аргумент z , представляется удобным верхний предел интеграла сделать равным z :

$$\varphi(\mu z) = 2\mu z e^{-\mu^2 z^2} \int_0^{\mu z} e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \mu y \\ dx = \mu dy \end{array} \right| = 2\mu^2 z e^{-\mu^2 z^2} \int_0^z e^{\mu^2 y^2} dy.$$

При наличии различных сортов ионов спектральная функция имеет вид:

$$\begin{aligned} S_0^*(\theta) &= \frac{cn_{e0}}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2 \times \\ &\times \frac{\beta_1 \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}}} e^{-\frac{m_{i\alpha}\theta^2}{m_{i1}}}}{\left[1+t \left(1 - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \Phi \left(\sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}}} \theta \right) \right) \right]^2 + \pi t^2 \theta^2 \left(\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}}} e^{-\frac{m_{i\alpha}\theta^2}{m_{i1}}} \right)^2}, \end{aligned}$$

где $\theta = \theta_1$, $\theta_{\alpha} = \beta_{\alpha} \omega = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{2\kappa T_i}}$ – ионно-нормированная частота;

Нормированная спектральная функция

$$s_0^*(\theta) = \frac{1+t}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta_1 \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}}} e^{-\frac{m_{i\alpha}\theta^2}{m_{i1}}}}{\left[1+t \left(1 - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \Phi \left(\sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}}} \theta \right) \right) \right]^2 + \pi t^2 \theta^2 \left(\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \sqrt{\frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}}} e^{-\frac{m_{i\alpha}\theta^2}{m_{i1}}} \right)^2}.$$

Полный вид спектральной функции ионной части спектра. Для плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, ионная часть спектрального распределения пространственно-временной АКФ флуктуации плотности электронов равна

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^4} \langle (\delta n_e)^2 \rangle_{\vec{k}, \omega} &= \frac{2\sqrt{\pi} n_0 \frac{\beta}{\mu} e^{-z^2} \left\{ [t(1-\varphi(\mu z))]^2 + [t\sqrt{\pi}\mu z e^{-\mu^2 z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2} + \\
 &+ \frac{2\sqrt{\pi} n_0 \beta e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1-\varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2} = \\
 &= 2\sqrt{\pi} n_0 \beta \times \\
 &\times \frac{\frac{e^{-z^2}}{\mu} \left\{ [t(1-\varphi(\mu z))]^2 + [t\sqrt{\pi}\mu z e^{-\mu^2 z^2}]^2 \right\} + e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1-\varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 S^*(\Delta\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2 \langle (\delta n_e)^2 \rangle \left. \begin{array}{l} |\Delta\vec{k}| = \frac{4\pi}{\lambda_0} \\ \Delta\omega = \omega - \omega_0 \end{array} \right| = \\
 &= \frac{c n_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \cdot \beta \times \\
 &\times \frac{\frac{1}{\mu} e^{-z^2} \left\{ [t(1-\varphi(\mu z))]^2 + [t\sqrt{\pi}\mu z e^{-\mu^2 z^2}]^2 \right\} + e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1-\varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2}.
 \end{aligned}$$

Нормированная спектральная функция $s^*(\Delta\omega) = \frac{S^*(\Delta\omega)}{R^*(0)}$, где

$$R^*(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\Delta\omega) \cos(\Delta\omega \cdot \tau) d(\Delta\omega).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R^*(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = \\ &= \frac{cn_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \frac{e^{-z^2} \left\{ [t(1-\varphi(\mu z))]^2 + [t\sqrt{\pi}\mu z e^{-\mu^2 z^2}]^2 \right\} +}{\left[1 - \varphi(z) + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 +} \rightarrow \\ &\quad + e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1-\varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\} \\ &\quad \rightarrow \frac{e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1-\varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\}}{\left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2} d(\Delta\omega) \approx \\ &\approx \frac{cn_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\mu^2 z^2}}{\left[1 + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 + \pi t^2 \mu^2 z^2 e^{-2\mu^2 z^2}} d(\mu z) \cong \\ &\cong \frac{cn_0 E_0^2}{8\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{1+t}. \end{aligned}$$

Квазинормированная спектральная функция

$$\begin{aligned} s^*(\Delta\omega) &= \frac{S^*(\Delta\omega)}{R_0^*(0)} = \frac{1+t}{\sqrt{\pi}} \cdot \beta \times \\ &\times \frac{\frac{1}{\mu} e^{-z^2} \left\{ [t(1-\varphi(\mu z))]^2 + [t\sqrt{\pi}\mu z e^{-\mu^2 z^2}]^2 \right\} + e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1-\varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1-\varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2} = \\ &= s_e^*(\Delta\omega) + s_i^*(\Delta\omega), \end{aligned}$$

где $s_i^*(\Delta\omega) = \frac{1+t}{\sqrt{\pi}} \cdot \beta \frac{e^{-\mu^2 z^2} \left\{ [1 - \varphi(z)]^2 + [\pi z e^{-z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1 - \varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2}$ -

квазинормированная спектральная функция ионной составляющей спектра;

$$s_e^*(\Delta\omega) = \frac{1+t}{\sqrt{\pi}} \cdot \beta \frac{\frac{1}{\mu} e^{-z^2} \left\{ [t(1 - \varphi(\mu z))]^2 + [t\sqrt{\pi} \mu z e^{-\mu^2 z^2}]^2 \right\}}{\left[1 - \varphi(z) + t(1 - \varphi(\mu z)) \right]^2 + \left[\sqrt{\pi} z e^{-z^2} + \sqrt{\pi} t \mu z e^{-\mu^2 z^2} \right]^2}$$

квазинормированная спектральная функция электронной составляющей спектра.

На рисунке представлены графики нормированной спектральной функции s_0^* , полученной при асимптотических приближениях, и квазинормированной спектральной функции s_i^* ионной части спектра некогерентного рассеяния.

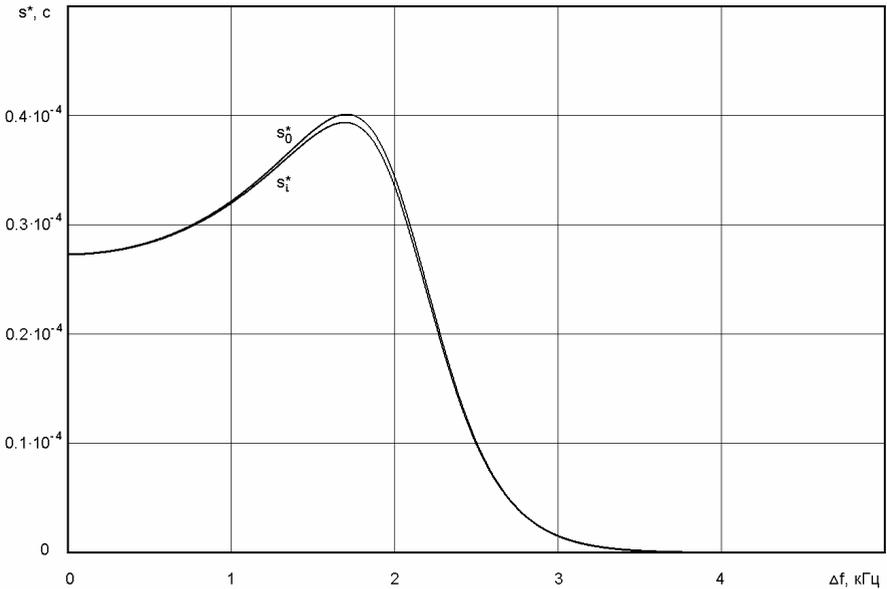


Рис. – Сравнение ионной составляющей s_i^* и её асимптотического приближения s_0^*

Нормированная спектральная функция
$$s_0^*(\Delta\omega) = \frac{S_0^*(\Delta\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_0^*(\Delta\omega) d(\Delta\omega)}$$
.

Квазинормированная спектральная функция
$$s_i^*(\Delta\omega) = \frac{S_i^*(\Delta\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_0^*(\Delta\omega) d(\Delta\omega)}$$
.

Выводы. Приведены аналитические выкладки расчётной формулы нормированной спектральной функции ионной части спектра и её упрощённого вида при использовании некоторых асимптотических приближений. Аналитическое выражение спектральной функции используется для вычисления теоретических значений автокорреляционной функции в процессе интерпретации экспериментальных значений АКФ. Асимптотическое приближение ионной части спектра несколько деформирует форму нормированной спектральной функции. В следующих статьях планируется вычислить погрешность ионосферных параметров, обусловленную погрешностью асимптотического приближения теоретического выражения характеристик некогерентно рассеянного сигнала, а также исследовать электронную часть спектра НР в области частот ионной составляющей спектра. Так как при использовании упрощённых формул требуется существенно меньше вычислительных ресурсов, асимптотические приближения удобно использовать при обработке экспериментальных значений характеристик НР сигнала для вычисления начальных значений ионосферных параметров с последующим уточнением с использованием полной формулы.

Список литературы: 1. *Fejer J.A.* Scattering of Radio Waves by an Ionized Gas in Thermal Equilibrium in the Presence of Uniform Magnetic Field / *J.A. Fejer* // *Can. J. Phys.* – 1961. – Vol. 39. – P. 716 – 740. 2. *Hagfors T.* Density fluctuation in a plasma in magnetic field, with application to the ionosphere / *T. Hagfors* // *J. Geoph. Res.* – 1961. – Vol. 66. – No. 6. – P. 1699 – 1712. 3. *Renau J.* The cross section for scattering of electromagnetic waves from an ionized gas in thermal nonequilibrium / *J. Renau* // *J. Geoph. Res.* – 1962. – Vol. 67. – No. 9. – P. 3604 – 3626. 4. *Dougherty J.P.* The conductivity of a partially ionized gas in alternative electric fields / *J.P. Dougherty* // *The Physics of Fluids.* – Vol. 8. – 1963. – P. 126 – 137. 5. *Salpeter E.E.* Density fluctuations in non-equilibrium plasma / *E.E. Salpeter* // *J. Geoph. Res.* – 1963. – Vol. 68. – No. 5. – P. 1321 – 1333. 6. *Ситенко А.Г.* Электромагнитные флуктуации в плазме / А.Г. Ситенко. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1965. – 184 с. 7. *Farley D.T.* A theory of incoherent scattering of radio waves by a plasma / *D.T. Farley* // *J. Geoph. Res.* – 1966. – Vol. 71. – No. 17. – P. 4091 – 4098. 8. *Эванс Дж.* Теоретические и практические вопросы исследования ионосферы методом некогерентного рассеяния радиоволн / *Дж. Эванс* // ТИИЭР. Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1969. – Т. 57. – № 4. – С. 139 – 175. 9. *Farley D.T.* Radio wave scattering from the ionosphere / *D.T. Farley* // *Methods of Experimental Physics.* – 1971. – Vol. 98. – P. 139 – 186. 10. *Эванс Дж.* Исследование ионосферы с помощью мощных радиолокаторов / *Дж. Эванс* // ТИИЭР. Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1975. – Т. 63. – № 12. – С. 5 – 20. 11. *Таран В.И.* Некогерентное рассеяние радиоволн на тепловых флуктуациях

электронной плотности / *В. И. Таран* // Ионосферные исследования. – М.: Сов. Радио, 1979. – № 27. – С. 19 – 32. **12.** *Таран В.И.* Наблюдения ионосферы с помощью метода некогерентного рассеяния. Сообщение 1. Основные предпосылки и экспериментальные результаты / *В.И. Таран* // Вестник Харьк. политех. ин-та. «Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния». – 1979. – Вып. 1. – № 155. – С. 3 – 11. **13.** *Брюнелли Б. Е.* Метод некогерентного рассеяния радиоволн / *Б.Е. Брюнелли, М.И. Кочкин, И.Н. Пресняков, Е.Д. Терещенко, В.Д. Терещенко.* – Л.: Наука, 1979. – 188 с. **14.** *Гринченко С.В.* Определение ионного состава в нижней ионосферы методом некогерентного рассеяния / *С.В. Гринченко, Д.А. Дзюбанов, М.Н. Забирко* // Вестник Харьк. политех. ин-та «Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния». – 1987. – Вып. 5. – № 248. – С. 16 – 19. **15.** *Гринченко С.В.* Определение ионного состава в F1-области по автокорреляционной функции НР сигнала / *С.В. Гринченко* // Вестник Харьк. политех. ин-та «Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния». – 1988. – Вып. 6. – № 248. – С. 6 – 7. **16.** *Гринченко С.В.* Определение электронной концентрации методом НР в областях E, F1 с учетом изменяющегося ионного состава / *С.В. Гринченко* // Вестник Харьк. политех. ин-та «Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния». – 1989. – Вып. 7. – № 271. – С. 10 – 11. **17.** *Гринченко С.В.* Оптимальный алгоритм многократных вычислений теоретических характеристик некогерентного рассеянного сигнала / *С.В. Гринченко* // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. Сб. научных тр. ХГПУ. – 1999. – Вып. 7, часть третья. – С. 331 – 336. **18.** *Рогожкин Е.В.* Зондирующие сигналы для исследования ионосферы методом некогерентного рассеяния / *Е.В. Рогожкин, В.А. Пуляев, В.Н. Лысенко.* – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – 256 с. **19.** *Пуляев В.А.* Определение параметров ионосферы методом некогерентного рассеяния радиоволн / *В.А. Пуляев, Д.А. Дзюбанов, И.Ф. Домнин.* – Х.: Изд-во «Підручник» НТУ «ХПИ», 2010. – 240 с.

Поступила в редколлегию 12.11.2012